Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Filiala Tulcea

Concursul Naţional LAURENŢIU PANAITOPOL
29 martie 2014, Tulcea

CLASA a XI-a

Problema 1. Găsiţi o condiţie necesară şi suficientă astfel încât şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 = a$, $x_1 = b$, cu $a, b > 0$ şi $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_n}\right)$ să fie periodic.

Dorel Ţigău, Tulcea

Problema 2. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = \sqrt{1 + nx_n}$, $n \geq 1$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/n = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(n - x_n) = 2$.

G. Rene

Problema 3. Fie A, B, C matrice de ordin 2 cu elemente întregi astfel încât $A^2 = BC$, $B^2 = CA$ şi $C^2 = AB$.

a) Arătaţi că $A^3 = B^3 = C^3$.

b) Daţi exemplu de matrice A, B, C distincte două câte două având proprietatea din enunţ.

Laurenţiu Panaitopol

Problema 4. Pentru două numere naturale nenule i şi j notăm a_{ij} numărul divizorilor naturali comuni – de exemplu, $a_{24} = 2$ şi $a_{69} = 2$. Arătaţi că determinantul matricei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ este egal cu 1, oricare ar fi $n \geq 1$.

Problema 1. Găsiţi o condiţie necesară şi suficientă astfel încât şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 = a$, $x_1 = b$, cu $a, b > 0$ şi $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_n}\right)$ să fie periodic.

Soluţie. Relaţia de recurenţă devine $x_{n+1}x_n = \frac{1}{2}(x_n x_{n-1} + 1)$ **1 punct**

Definim şirul $y_n = x_n x_{n-1}$, pentru $n \geq 1$, cu $y_1 = ab$, obţinem

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + 1) \Leftrightarrow y_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(y_n - 1).$$

Prin urmare şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este periodic dacă şi numai dacă şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este periodic, adică, ţinând seama de ultima relaţie, rezultă că este necesar ca $y_n = 1$, pentru orice $n \geq 1$ şi prin urmare $y_1 = ab = 1$.

Problema 2. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = \sqrt{1 + nx_n}$, $n \geq 1$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/n = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(n - x_n) = -2$.

Soluţie. Vom arăta că $n-2 \leq x_n \leq n$, $n \geq 1$. Într-adevăr, $n-1 = \sqrt{1 + n(n-2)} \leq \sqrt{1 + nx_n} = x_{n+1} \leq \sqrt{1 + n^2} \leq n + 1$. Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/n = 1$.

Avem $x_{n+1}^2 - (n-1)^2 = 1 + nx_n - (n-1)^2$. Notând $x_{n+1} - n + 1 = y_{n+1}$, obţinem $y_{n+1}(x_{n+1} + n - 1) = ny_n$. Atunci $2(n-1)y_{n+1} \leq ny_n$ sau $y_{n+1}/y_n \leq n/2(n-1)$, ceea ce implică $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Problema 3. [*Laurenţiu Panaitopol*] Fie A, B, C matrice de ordin 2 cu elemente întregi astfel încât $A^2 = BC$, $B^2 = CA$ şi $C^2 = AB$.

a) Arătaţi că $A^3 = B^3 = C^3$.

b) Daţi exemplu de matrice A, B, C distincte două câte două având proprietatea din enunţ.

Soluţie. a) Avem $A^3 = (A^2)A = (BC)A = B(CA) = B(B^2) = B^3$ şi $B^3 = CAB + C^3$.

b) De exemplu, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = A^2$ şi $C = A^3 = I_2$.

Problema 4. Pentru două numere naturale nenule i şi j notăm a_{ij} numărul divizorilor naturali comuni – de exemplu, $a_{24} = 2$ şi $a_{69} = 2$. Arătaţi că determinantul matricei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ este egal cu 1, oricare ar fi $n \geq 1$.

Soluţie. Fie $b_{ij} = 1$ dacă j divide i şi 0 în caz contrar. Atunci $A = BB^t$.

Cum B este matrice triunghiulară şi $b_{ii} = 1$, rezultă $\det B = 1$ şi apoi $\det A = 1$.